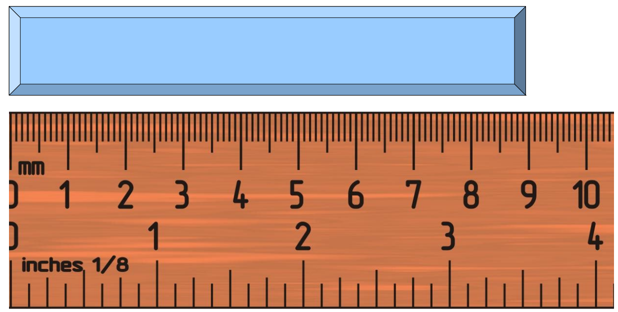
Prezentacja wyników pomiaru, niepewność pomiarów pośrednich

Ewa Pawelec

Przedstawienie wyników pomiaru

- Jeżeli mamy zmierzony jakiś obiekt:



  Wynik: 8,5 cm < *L* < 9,5 cm (z dokładnością do 0,5 cm) zapisujemy jako *L* = 9 (konwencja – niepewność to ± 0,5 ostatniej jednostki)

- W sytuacji gdyby obiekt zmierzyć z dokładnością milimetrową, byłoby to *L* = 8,9 cm, z dokładnością do 0,5 mm i oznaczałoby, że 8,85 cm < *L* < 8,95 cm
- W wypadku braku innych oznaczeń ta konwencja stosowana jest w tablicach fizycznych (w niektórych niepewności są explicite podane)

Przedstawienie niepewności

- Jeżeli mamy wynik *g* i niepewność pomiarową *u*(*g*) (u – ang. uncertainty) to zapisujemy to jako:
- Przy niepewności standardowej:
  - g = 9,781 m/s^2, $u(g)$ = 0,076 m/s^2
  - g = 9,781(76) m/s^2
  - g = 9,781(0,076) m/s^2
- Przy niepewności rozszerzonej (współczynnik rozszerzenia $k \geq 2$):
  - g = 9,78 m/s^2, $U(g)$ = 0,15 m/s^2
  - g = (9,78 ± 0,15) m/s^2
- Zasadą jest podawanie dwóch cyfr znaczących niepewności:
  - m = 100,021 g, $u(m)$ = 3 mg – przy zapisie niepewności podano **zbyt mało** cyfr,
  - m = 100,02147(0,00352) g – przy zapisie niepewności podano **zbyt dużo** cyfr.

Cyfry pewne, cyfry znaczące

- Cyfry znaczące liczą się od pierwszej niezerowej cyfry:

0,00**100**, **2258300**

- Cyfry pewne dadzą się określić dopiero wtedy, jeżeli podamy już niepewność:

2253 ± 25

- Przy zapisie wielkości podajemy cyfry pewne + tyle niepewnych, ile jest cyfr znaczących błędu, tj jeżeli:

x = 1,55746 cm $U(x)$ = 0,2545 cm

x = (1,56 ± 0,26) cm

  - Błędy zaokrąglamy zawsze w górę!
  - Uwaga, cyfr znaczących nie należy mylić z cyframi po przecinku:

    33254 ± 156,2 należy zapisać jako 33250 ± 160

  - Jeżeli komuś taki zapis bardzo się nie podoba, to wykorzystać potęgi:

    $(33{,}25 \pm 0{,}16) \cdot 10^3$

- Dla wielkości tablicowych przedostatnia cyfra jest pewna.

Oszacowania niepewności złożonych

- Jeżeli jakąś wielkość wyznaczamy z sumy (różnicy) dwóch innych:
  - $x_1 = 2{,}2 \pm 0{,}5$; $x_2 = 1{,}2 \pm 0{,}2$; czyli te wielkości zawierają się w przedziałach:
    $1{,}7 \le x_1 \le 2{,}7$; $1{,}0 \le x_2 \le 1{,}4$
  - interesująca nas wielkość to $r = x_1 + x_2$
  - największa możliwa wielkość to $r_{max} = x_{1\ max} + x_{2\ max} = 2{,}7 + 1{,}4 = 4{,}1$
  - najmniejsza możliwa wielkość to $r_{min} = x_{1\ min} + x_{2\ min} = 1{,}7 + 1{,}0 = 2{,}7$
  - wielkość niepewności będzie równa $u(r) = (r_{max} - r_{min})\ /2 = 0{,}7$
  - mamy więc $u(r) = u(x_1) + u(x_2)$
- Jeżeli do wielkości dodajemy stałą, to błąd stałej = 0, czyli niepewność nie zmienia się
- Jeżeli wielkość mnożymy przez stałą, to jest to równoznaczne wielokrotnemu dodaniu, czyli niepewność się mnoży przez stałą
- To jest szacowanie zgrubne, tak zwany błąd maksymalny

Niepewność iloczynu

- Zamiast sumy interesuje nas iloczyn:

$$S = x_1 \cdot x_2$$

- W takiej sytuacji, podobną metodą mamy:

$$S_{max} = x_{1\ max} \cdot x_{2\ max} = (x_1 + u(x_1)) \cdot (x_2 + u(x_2)) = x_1 \cdot x_2 \left(1 + \frac{u(x_1)}{x_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{u(x_2)}{x_2}\right)$$

$$S_{min} = x_{1\ min} \cdot x_{2\ min} = (x_1 - u(x_1)) \cdot (x_2 - u(x_2)) = x_1 \cdot x_2 \left(1 - \frac{u(x_1)}{x_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{u(x_2)}{x_2}\right)$$

$$S_{max} = x_1 \cdot x_2 \left(1 + \frac{u(x_1)}{x_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{u(x_2)}{x_2}\right) = x_1 \cdot x_2 \left(1 + \frac{u(x_1)}{x_1} + \frac{u(x_2)}{x_2} + \cancel{\frac{u(x_1)}{x_1} \frac{u(x_2)}{x_2}}\right)$$

Niepewności są małe w stosunku do wielkości błędu, więc taki iloczyn można spokojnie zaniedbać

Niepewność iloczynu cd

- Analogicznie, identycznie zaniedbując wyższy rząd:

$$S_{min}=x_1\cdot x_2\left(1-\frac{u(x_1)}{x_1}-\frac{u(x_2)}{x_2}\right)$$

- Niepewność *S* wychodzi więc:

$$u(S)=\frac{1}{2}(S_{max}-S_{min})=\frac{1}{2}\left[x_1\cdot x_2\left(1+\frac{u(x_1)}{x_1}+\frac{u(x_2)}{x_2}\right)-x_1\cdot x_2\left(1-\frac{u(x_1)}{x_1}-\frac{u(x_2)}{x_2}\right)\right]$$

$$u(S)=x_1\cdot x_2\left(\frac{u(x_1)}{x_1}+\frac{u(x_2)}{x_2}\right)=\boxed{u(x_1)\cdot x_2+u(x_2)\cdot x_1}$$

- Dla sytuacji funkcji dowolnej obliczana jest różniczka zupełna, czyli:

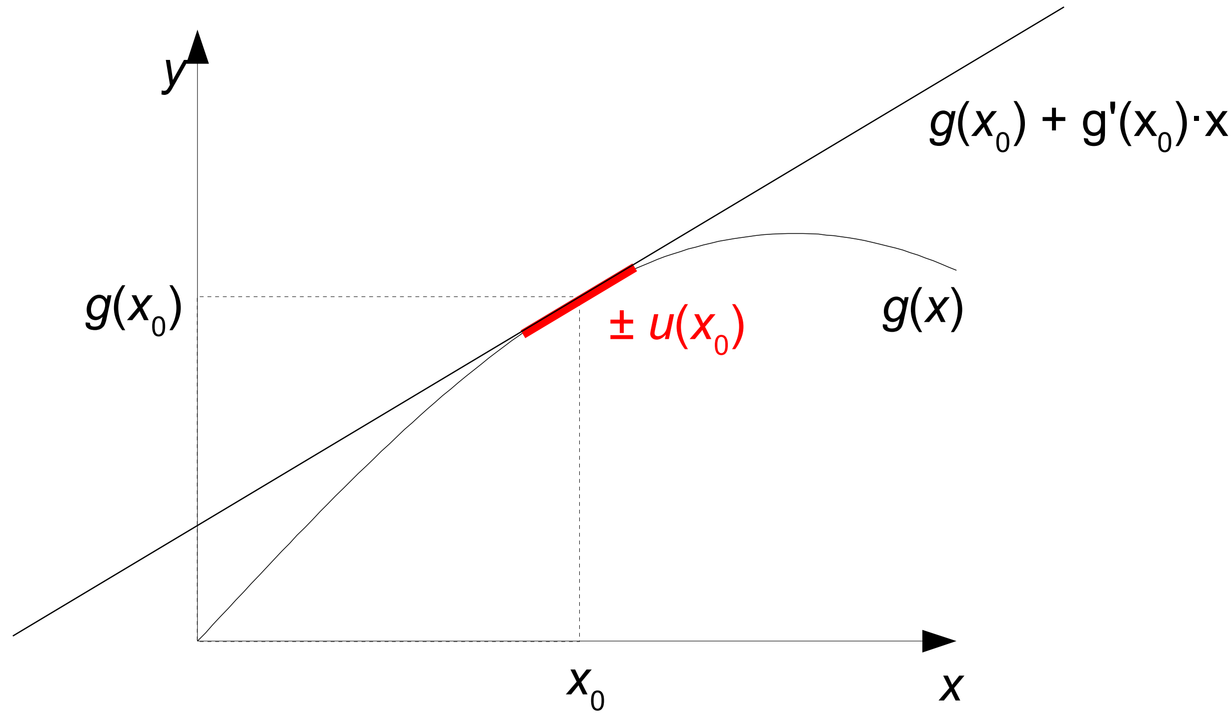
$$\boxed{u(y)=\left|\frac{\partial y}{\partial x_1}\right|\cdot|u(x_1)|+\left|\frac{\partial y}{\partial x_2}\right|\cdot|u(x_2)|+\ldots+\left|\frac{\partial y}{\partial x_N}\right|\cdot|u(x_N)|}$$

Skąd się bierze różniczka?

- Zasadniczo do wyprowadzenia różniczki zupełnej wystarczą informacje o niepewności sumy dwóch wielkości, iloczynu przez stałą oraz dodawania stałej, ponieważ:

$$g(x) \approx g(x_0) + g'(x_0) \cdot x$$

$$g'(x) \equiv \frac{\partial g}{\partial x}$$



- Tak więc, zamiast skomplikowanej funkcji, mamy mnożenie przez stałą oraz dodanie stałej, a dla więcej niż jednej zmiennej – dodanie do siebie niepewności dwóch wielkości

Przykład

- Z pomiarów napięcia *U* i natężenia *I* wyliczmy niepewność *R*:

$$u(R)=\left|\frac{\partial R}{\partial I}\right|\cdot|u(I)|+\left|\frac{\partial R}{\partial U}\right|\cdot|u(U)|$$

  - Ponieważ:

$$R=\frac{U}{I}$$

  - to poszczególne pochodne będą równe:

$$\frac{\partial R}{\partial U}=\frac{1}{I} \qquad \frac{\partial R}{\partial I}=\frac{-U}{I^2}$$

  - niepewność dana więc będzie wzorem:

$$u(R)=\frac{1}{I}\cdot u(U)+\frac{U}{I^2}\cdot u(I)$$