Rozkład normalny – zasady przenoszenia błędów

Ewa Pawelec

Niepewność dla rozkładu norm.

- Zamiast dodawania całych zakresów uwzględniamy prawdopodobieństwo trafienia dwóch wartości:

$$P(x_1, x_2) = P(x_1) \cdot P(x_2)$$ (jeżeli x_1 i x_2 niezależne)

- Z tego wyliczamy prawdopodobieństwo trafienia danej wielkości $g(x_1,x_2)$
- Można sprawdzić, że dla $g(x_1,x_2) = x_1 + x_2$ dostaniemy, że szerokość rozkładu dla zmiennej g wynosi:

$$\sigma_g^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

- Jeżeli dodamy do zmiennej jakąś stałą, to rozkład tylko się przesuwa, czyli

$$\sigma_{x+A}^2 = \sigma_x^2$$

- Jeżeli wymnożymy zmienną przez liczbę to rozkład się poszerza:

$$\sigma_{x \cdot B}^2 = B^2 \sigma_x^2$$

Ostatecznie – wzór na niepewność

- Tak więc poprawny wzór na niepewność pomiaru pośredniego (zgodny z ISO):

$$u(g)^2=\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)^2\cdot(u(x_1))^2+\left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)^2\cdot(u(x_2))^2+\ldots+\left(\frac{\partial g}{\partial x_N}\right)^2\cdot(u(x_N))^2$$

- Czyli:

$$u(g)=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)^2\cdot(u(x_i))^2}$$

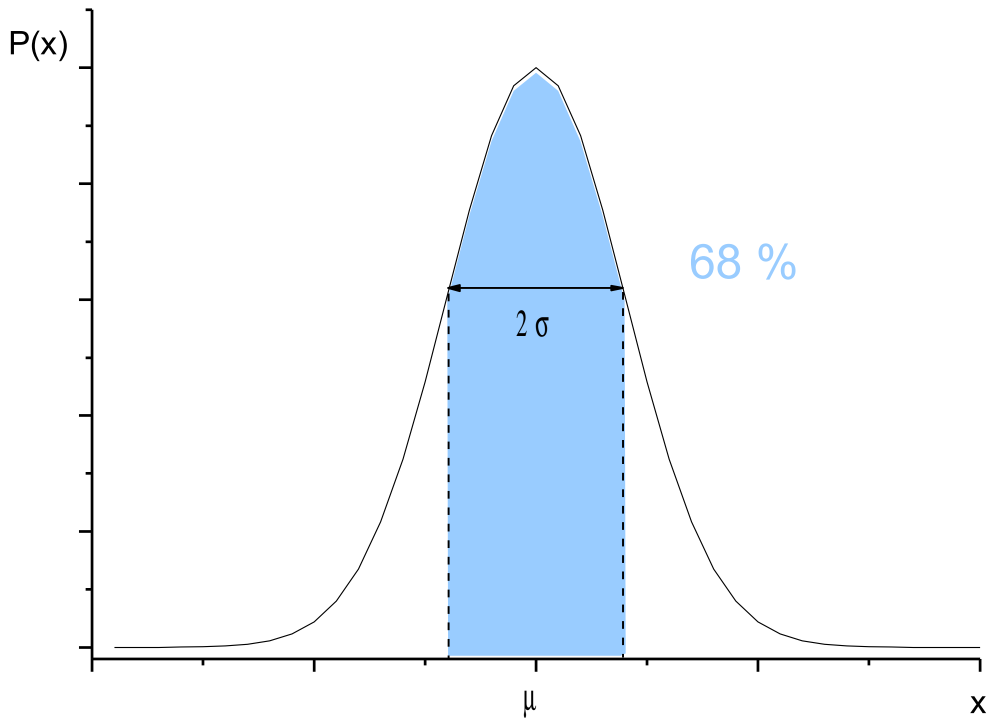
- Co zrobić jednak z błędem miernika? Wg ISO zakładamy rozkład normalny z szerokością:

$$u(g)=\frac{\Delta g}{\sqrt{3}}$$

gdzie Δg jest niepewnością miernika.

Niepewność rozszerzona

- Z niepewności rozszerzonej korzystamy żeby błąd oszacować lepiej, tj żeby podać przedział, w którym mieści się więcej pomiarów:



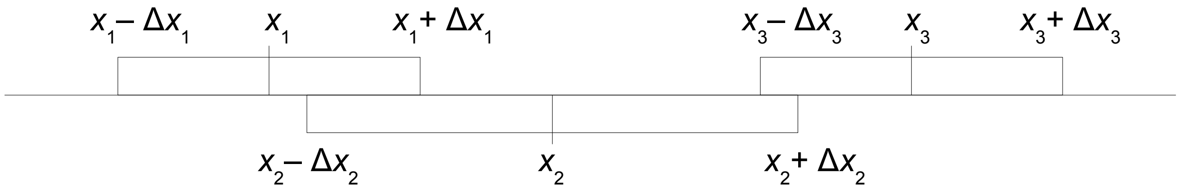
Stąd niepewność rozszerzona to przynajmniej 2 σ, aby przekryć większość rozkładu (99,7 % otrzymamy przy 3 σ)

Błąd gruby – odrzucanie pomiarów

- Kryterium Chauveneta, czyli kiedy wolno odrzucić jakiś pomiar?
  - Najpierw należy obliczyć średnią oraz odchylenie standardowe, uwzględniając wszystkie pomiary, czyli odtworzyć rozkład normalny dla tej zmiennej.
  - Sprawdzić jakie jest prawdopodobieństwo wystąpienia wielkości tak odległej od średniej (wziąć tablice, albo wyliczyć samodzielnie ze wzoru na krzywą Gaussa).
  - Przemnożyć liczbę pomiarów przez prawdopodobieństwo wystąpienia „podejrzanego” pomiaru. Jeżeli wynik jest mniejszy od 0,5 to można uznać, że wystąpił błąd gruby i dany wynik można odrzucić (oczywiście, wtedy należy obliczenia średniej i odchylenia standardowego powtórzyć).
- Przykład:
  - W eksperymencie zmierzono wielkość *x*, otrzymując 9, 10, 10, 10, 11, oraz 50. Średnia wynosi 17, odchylenie standardowe 16. 50 jest różne od 17 o 33, czyli o trochę ponad dwa odchylenia standardowe. Prawdopodobieństwo takiego wyniku to 0,05. Przy sześciu pomiarach, iloczyn będzie równy $0{,}05 \cdot 6 = 0{,}3 < 0{,}5$ – wynik odrzucić

Zgodność wyników pomiarów

- Dwa różne pomiary tej samej wartości, x_1 o niepewności $u(x_1)$ oraz x_2 o niepewności $u(x_2)$ są zgodne wtedy, jeżeli istnieje niezerowa część wspólna przedziałów $(x_1 - u(x_1); x_1 + u(x_1))$ oraz $(x_2 - u(x_2); x_2 + u(x_2))$
- Zgodność pomiarów nie jest przechodnia! Jeżeli jeden pomiar jest zgodny z drugim, a drugi z trzecim, to nie znaczy że pierwszy i trzeci są zgodne!



- Zgodność pomiarów należy rozważać przyjmując niepewność rozszerzoną, ponieważ dopiero wtedy rzeczywiście można ocenić, czy nie ma możliwości by oba pomiary były jednocześnie poprawne.
- Przy porównywaniu wyników pomiaru z wartością tablicową trzeba uwzględniać dokładność wartości tablicowej!

Średnia ważona

- Jeżeli mamy wyniki z dwóch eksperymentów:

$$x_1 = \bar{x}_1 \pm u(\bar{x}_1)$$
$$x_2 = \bar{x}_2 \pm u(\bar{x}_2)$$

  jak należy te eksperymenty połączyć, jeżeli nie znamy dokładnie wyników, a tylko ich średnie i odchylenia standardowe?
- Przypomnienie: średnia ważona za pomocą częstości wyników:

$$\bar{x} = \sum_{k=1}^{M} x_k \cdot F_k$$

- Częstość wyników jest odpowiednikiem prawdopodobieństwa, więc rozkład prawdopodobieństwa powinien również nadawać się do policzenia średniej ważonej

Średnia ważona – c.d.

- Ogólnie średnia ważona dana jest wzorem:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^{N} x_k \cdot w_k}{\sum_{k=1}^{N} w_k}$$ gdzie w_k to wagi x_k

- Jeżeli wielkości x_1, x_2...x_N są dane rozkładami normalnymi o tej samej wartości prawdziwej μ, oraz o różniących się szerokościach σ_1... σ_N to można policzyć jaki jest najlepszy estymator średniej tych pomiarów – jest nim średnia ważona z wagami równymi odwrotności kwadratów odchyleń standardowych:

$$w_k = \frac{1}{\sigma_k^2}$$

Średnia ważona – niepewność

- Większym problemem jest obliczenie wariancji dla średniej ważonej – mogą być dwa wzory:
  - szacowanie oddolne (tak jakby średnia była dokładnie wartością prawdziwą)

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\sigma_k^2}}$$

  - szacowanie odgórne:

$$\sigma_{\bar{x}'}^2 = \frac{\sigma_{\bar{x}}^2}{N-1} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{x_k - \bar{x}}{\sigma_k} \right)^2$$

- Obliczając błąd średniej nie mamy wartości prawdziwej, tylko jej estymację (czyli średnią). Trzeba uwzględniać fakt, że nie jest to dokładnie to samo (w wariancji zwykłej średniej uwzględnia się to dzieląc przez *N* – 1, zamiast przez *N*)