

Problem dwóch kul

Dwie kule umieszczone w pochyłej rynnie i stykające się z sobą nie zawsze się staczają. Wyjaśnij to zjawisko i znajdź warunki, w jakich ono zachodzi.

1. Wstęp



W niniejszym artykule spróbujemy przedstawić jeden z problemów postawionych na tegorocznej edycji Turnieju Młodych Fizyków oraz zaproponowany przez naszą drużynę sposób jego rozwiązania. Zjawisko opisane w treści zadania może wydawać się dość niezwykle – wydawałoby się że kule położone na pochyłej powierzchni zaczną się z niej po prostu staczać. Szanowny Czytelniku – sprawdź. Ze swojej strony zapewniamy że fotografie obok rzeczywiście przedstawiają układ spoczywających kul.

2. Analiza teoretyczna

Zanim przeszliśmy do właściwej analizy problemu musieliśmy zastanowić się jaki typ rynny będziemy rozpatrywać. Zadanie było postawione bardzo ogólnie. Musieliśmy więc dokonać wyboru sami. Zdecydowaliśmy się na rynnę V – kształtną z racji tego, że umożliwia ona opisanie w ramach jednego modelu sytuacji kiedy kule stykają się z podłożem zarówno w dwóch, jak i w jednym miejscu (w granicy, gdy jej kąt rozwarcia wynosi 180 stopni, daje ona płaszczyznę). Podjęliśmy decyzję aby nie rozpatrywać przypadków kiedy kule są na tyle duże że w U – kształtnej rynnie stykają się z nią w trzech punktach.

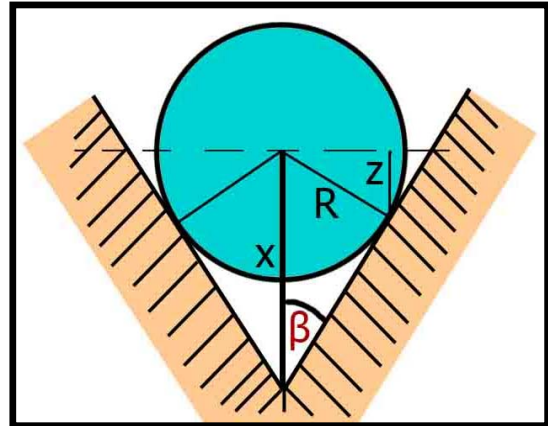
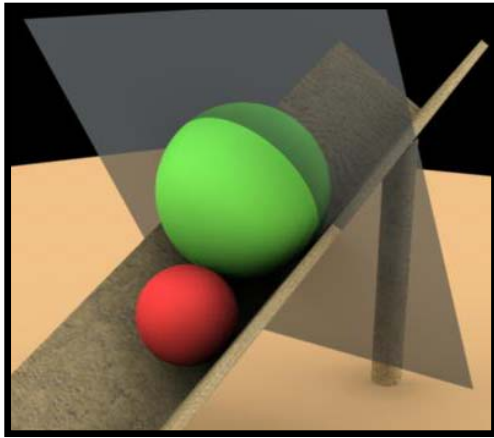
2.1 Główne założenia

Oto podstawowe założenia na których opiera się zaproponowany przez nas model opisujący zjawisko:

- zarówno kule jak i rynna są ciałami sztywnymi i nie podlegają żadnym deformacjom;
- środek masy pokrywa się z geometrycznym środkiem kuli;
- wszystkie nieregularności powierzchni zarówno kul jak i rynny są pomijalne;

2.2 Geometryczna analiza rozmieszczenia kulek w rynnie.

Przeanalizujemy przekrój poprzeczny prostopadły do kierunku spadku rynny:



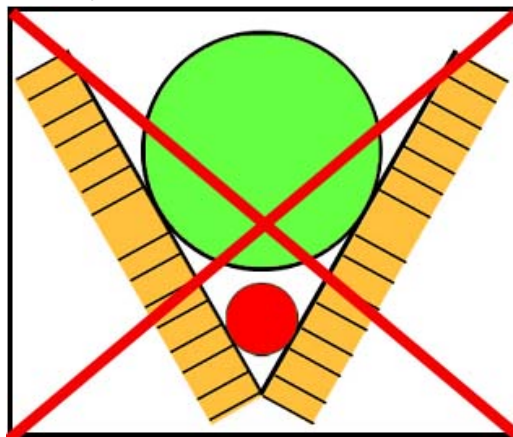
Wprowadźmy następujące oznaczenia:

- 2β – kąt rozwarcia rynny;
- r, R – promienie kulek ;
- x, X – odległości środków kulek od podstawy rynny;
- z, Z – odległości między punktami styku kulek z rynną a prostymi poziomymi poprowadzonymi przez ich środki.

Z rysunku obok widać że:

$$X = \frac{R}{\sin \beta} \quad x = \frac{r}{\sin \beta} \quad z = r \sin \beta \quad Z = R \sin \beta$$

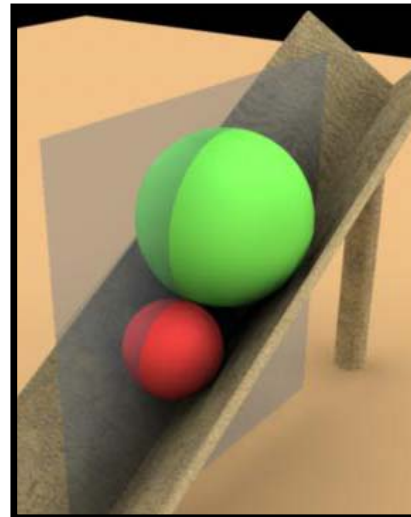
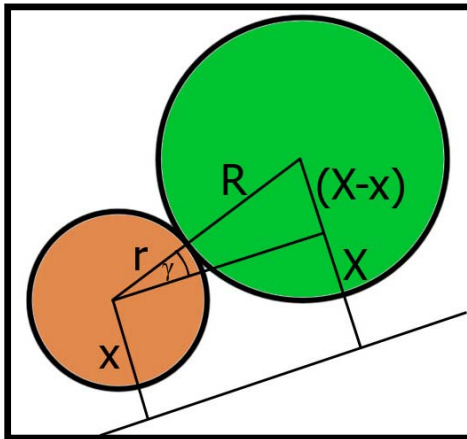
Aby kulki pozostawały w równowadze muszą się ze sobą stykać. Aby tak było kąt β nie może być zbyt mały:



Proste rozważania geometryczne prowadzą do pierwszego warunku na stabilność naszego układu:

$$1) \quad \sin \beta \leq \frac{|R - r|}{R + r}$$

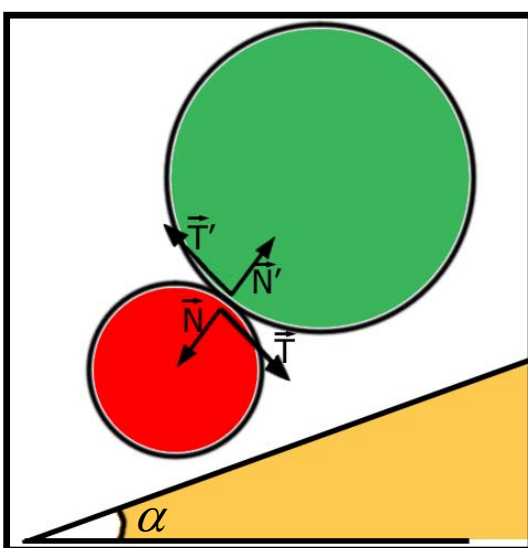
Przekonałiśmy się już że stykające się ze sobą kulki o różnych rozmiarach znajdują się w różnych odległościach od podstawy rynny. Znaczy to że prosta przeprowadzona przez ich środki tworzy z prostą równoległą do kierunku nachylenia rynny pewien kąt – nazwijmy go γ . Wielkość ta okaże się przydatna przy analizie sił działających między kulkami.



$$\sin \gamma = \frac{R-r}{\sin \beta (R+r)}$$

2.3 Analiza warunków równowagi.

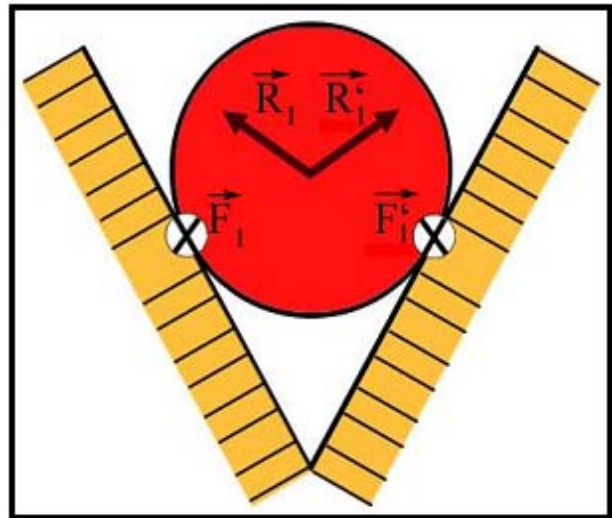
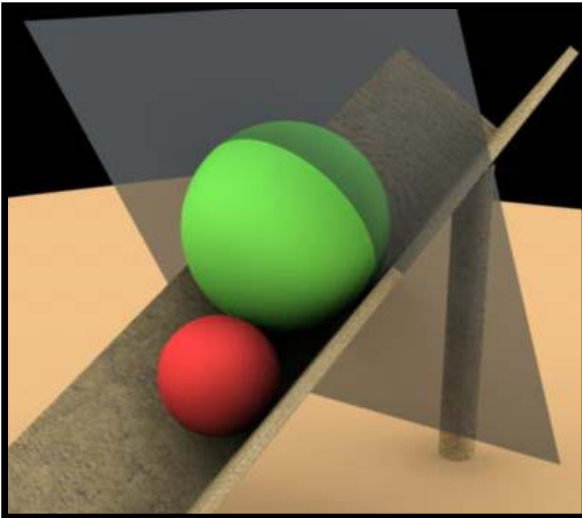
Jak wiadomo aby układ pozostawał w równowadze wektorowa suma sił i momentów (liczonych względem pewnej określonej osi) na niego działających musi być równa zero. Aby opisać warunki równowagi wystarczy zatem zidentyfikować siły działające na kulki i rozwiązać układ równań. Rozpocznijmy od analizy sił działających między kulkami:



- \vec{N} - siła nacisku z jaką kula znajdująca się wyżej działa na niższą
 - \vec{N}' - siła nacisku z jaką kula znajdująca się niżej działa na wyższą
 - \vec{T} - siła tarcia z jaką kula znajdująca się wyżej działa na niższą
 - \vec{T}' - siła tarcia z jaką kula znajdująca się niżej działa na wyższą
 - α - kąt nachylenia rynny do poziomu
- Zgodnie z 3 zasadą dynamiki Newtona:

$$|\vec{N}| = |\vec{N}'| \quad |\vec{T}| = |\vec{T}'|$$

Przyjrzyjmy się teraz jakie siły działają na kulkę ze strony rynny.



\vec{R}_1, \vec{R}_1' - siły reakcji rynny na niżej położoną kulkę – skierowane są prostopadłe do powierzchni styku rynny z kulką

\vec{F}_1, \vec{F}_1' - siły tarcia działające ze strony rynny na niżej położoną kulkę. Należy zaznaczyć że przyłożone w miejscach odległych o z od poziomej osi przechodzącej przez środek kulki

Biorąc pod uwagę symetrię problemu oczywiste jest, że:

$$|\vec{R}_1| = |\vec{R}_1'| \quad |\vec{F}_1| = |\vec{F}_1'|$$

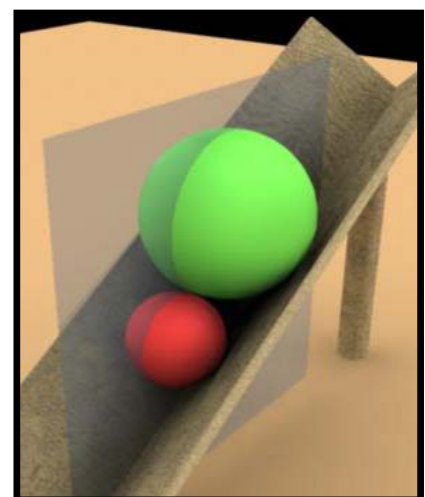
Wobec tego na kierunku w poprzek rynny składowe reakcji znoszą się. Oznacza że przy rozważaniu równowagi sił działających na kulkę wystarczy rozpatrzyć ich rzuty na płaszczyznę wyznaczoną przez kierunek spadku rynny. Dla zapewnienia klarowności opisu wprowadźmy dodatkowe pomocnicze oznaczenia:

$$\vec{N}_1 = \vec{R}_1 + \vec{R}_1'$$

$$\vec{T}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_1'$$

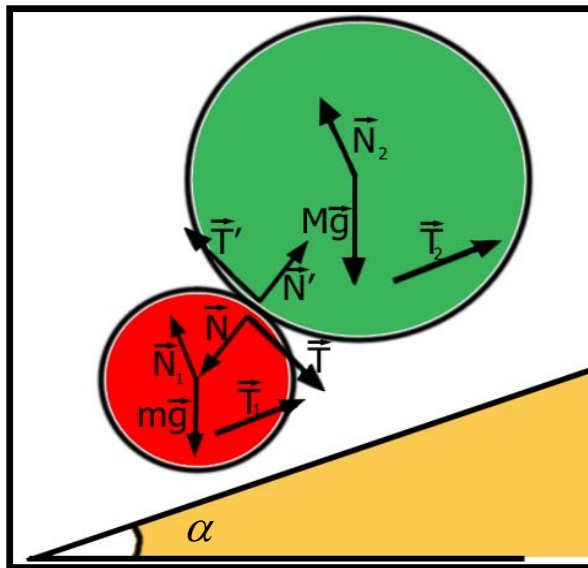
Oczywiste jest, że:

$$|\vec{N}_1| = 2|\vec{R}_1| \sin \beta \quad |\vec{T}_1| = 2|\vec{F}_1|$$



Analogicznie jak siły działające na niższą kulkę określamy siły działające na kulkę znajdującą się wyżej. Tak samo też definiujemy wektorowe sumy sił działających na nią ze strony rynny: \vec{T}_2 i \vec{N}_2 .

Teraz, uwzględniając grawitacyjne przyciąganie Ziemi, możemy przystąpić do napisania warunków równowagi.



$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0}$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{\tau}_i = \vec{0}$$

Rozpatrując składowe siły na kierunku wyznaczonym przez spadek rynny otrzymujemy:

$$mg \sin \alpha + N \cos \gamma - T \sin \gamma - T_1 = 0$$

$$Mg \sin \alpha - N \cos \gamma + T \sin \gamma - T_2 = 0$$

Analogicznie dla kierunku prostopadłego do linii spadku mamy:

$$mg \cos \alpha - N_1 + N \sin \gamma + T \cos \gamma = 0$$

$$Mg \cos \alpha - N_2 - N \sin \gamma - T \cos \gamma = 0$$

Rozważając równowagę momentów działających na kulki dostajemy:

$$T_1 r \sin \beta = Tr$$

$$T_2 R \sin \beta = TR$$

Z powyższych dwóch wyrażeń wynika bezpośrednio że $T = T_1 \sin \beta = T_2 \sin \beta$

Teraz pozostaje już tylko wyznaczyć z powyższego układu równań wielkości w nim występujące. I tak po wielu żmudnych przekształceniach otrzymujemy:

$$T_1 = T_2 = \frac{(M + m)}{2} g \sin \alpha$$

$$T = \frac{(M + m)}{2} g \sin \alpha \sin \beta$$

$$N = \frac{g \sin \alpha}{2 \cos \gamma} [(M + m) \sin \beta \sin \gamma + (M - m)]$$

Wartość siły nacisku między kulkami musi być zawsze większa od zera. Ten sam warunek musi zatem spełniać wyrażenie w nawiasie kwadratowym po prawej stronie powyższego równania ($\cos \gamma$ w naszym przypadku jest zawsze dodatni). Uwzględniając wyrażenie na $\sin \gamma$ i upraszczając nierówność dostajemy drugi warunek na równowagę kulek w rynnice:

$$2) \quad \frac{M R}{m r} > 1$$

Wartości pozostałych sił działających na kulki okazują się być następujące:

$$N_1 = mg \cos \alpha + \frac{(M + m) \sin \beta}{2 \cos \gamma} g \sin \alpha + \frac{(M - m)}{2} g \sin \alpha \operatorname{tg} \gamma$$

$$N_2 = Mg \cos \alpha - \frac{(M + m) \sin \beta}{2 \cos \gamma} g \sin \alpha - \frac{(M - m)}{2} g \sin \alpha \operatorname{tg} \gamma$$

Jak wiadomo wartość siły tarcia nie może przekroczyć pewnej wartości maksymalnej określonej jako iloczyn wartości siły reakcji i współczynnika tarcia statycznego. Wykorzystując tą własność dla występujących powyżej wzorów opisujących siły tarcia i odpowiadające im siły reakcji otrzymujemy następujące warunki na odpowiednie współczynniki tarcia między rozpatrywanymi przez nas obiektami:

$$3) \quad \frac{1}{f} \leq \operatorname{tg} \gamma + \frac{M - m}{(M + m) \sin \beta \cos \gamma}$$

$$4) \quad \frac{1}{f_1} \leq \frac{2m \operatorname{ctg} \alpha}{(M + m) \sin \beta} + \frac{1}{\cos \gamma} + \frac{(M - m) \operatorname{tg} \gamma}{(M + m) \sin \beta}$$

$$5) \quad \frac{1}{f_2} \leq \frac{2M \operatorname{ctg} \alpha}{(M + m) \sin \beta} - \frac{1}{\cos \gamma} - \frac{(M - m) \operatorname{tg} \gamma}{(M + m) \sin \beta}$$

f - współczynnik tarcia statycznego między kulkami

f_1 - współczynnik tarcia statycznego między dolną kulką a rynną




f_2 - współczynnik tarcia statycznego między górną kulką a rynną

3. Doświadczalna weryfikacja zaproponowanego modelu.

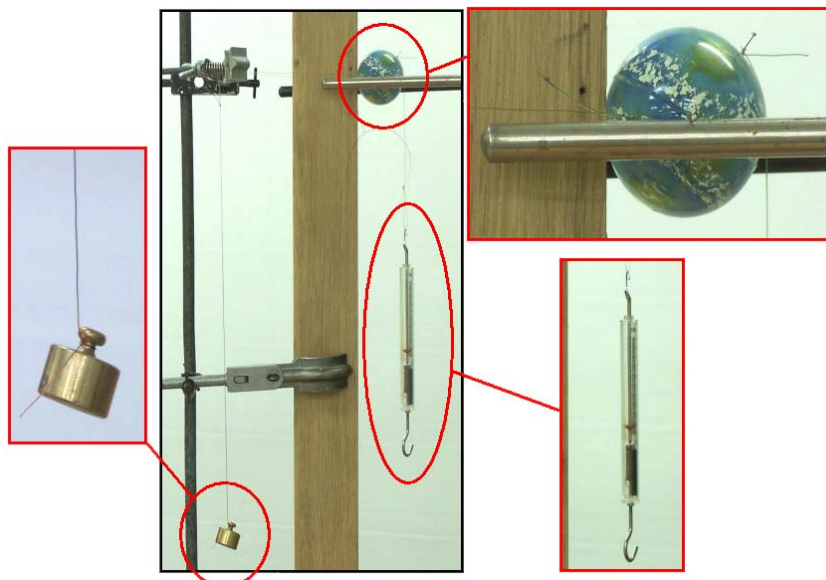
W poprzedniej części pokazaliśmy zależności, jakie muszą być spełnione aby dwie kulki umieszczone obok siebie w V – kształtnej rynnie nie staczały się z niej. W nierównościach 1) – 3) tych nie występuje kąt α . Znaczy to że muszą być one najpierw spełnione aby równowaga w ogóle mogła mieć miejsce. Wzory 4) – 5) z kolei pozwalają, jeśli zna się parametry charakteryzujące układ, przewidzieć krytyczny kąt nachylenia rynny do poziomu dla którego kulki przestają być stabilne. Wykorzystując te właśnie wyrażenia i przeprowadzając liczne eksperymenty mogliśmy sprawdzić zgodność naszego modelu z rzeczywistością.

3.1 Pomiar wielkości charakteryzujących kulki.




Mierzenie zarówno mas, jak i promieni kulek nie dostarczało nam większych trudności. Poniższa tabela przedstawia te właśnie parametry dla 3 wybranych kulek wykorzystanych w doświadczeniach:

	 Kulka 1	 Kulka 2	 Kulka 3
Masa ($\pm 0,1$ g)	54,2 g	24,3 g	7,5 g
Promień ($\pm 0,1$ cm)	2,6 cm	2,1 cm	1,3 cm

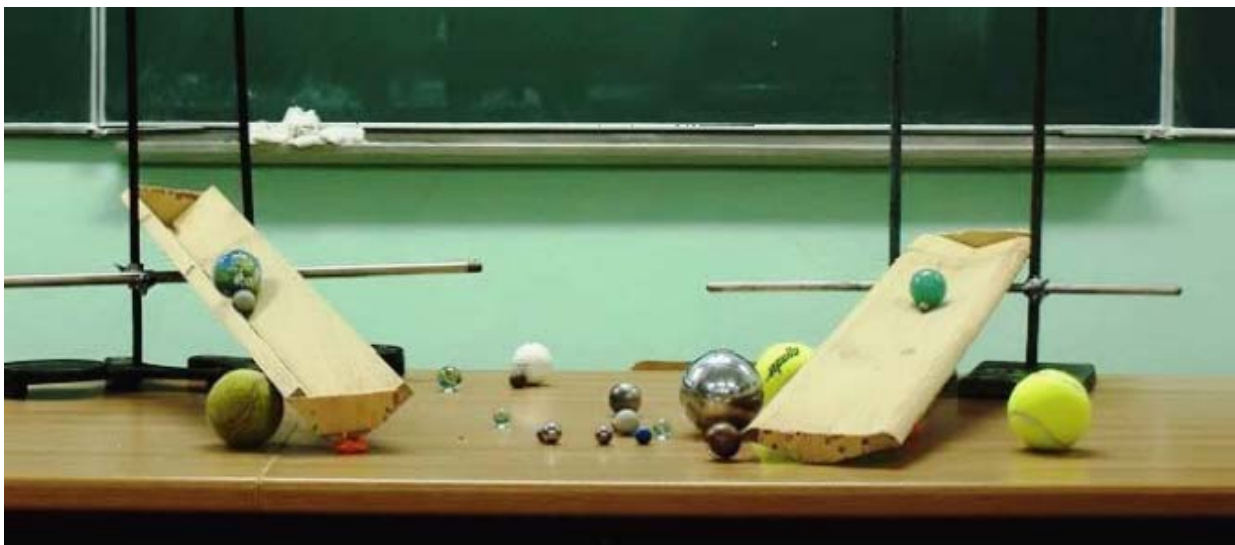
Napotkaliśmy jednak poważne problemy kiedy przyszło do wyznaczenia współczynników tarcia. Dopiero po wielu próbach udało się nam zbudować taki układ eksperymentalny dzięki któremu uzyskiwana dokładność pomiarów byłaby zadawalająca. Pokazuje go poniższy schemat:



Deska była umocowana w pozycji pionowej za pomocą statywu. W kulkę wbite były szpilki po to, aby zapewnić jej możliwość swobodnego obrotu wokół osi przez nie wyznaczonej. Za pomocą widocznego po lewej stronie żelaznego ciężarka o znanej masie byliśmy w stanie określić siłę jaką kulka jest dociskana do deski. W oparciu o to, poprzez ciągnięcie pionowo w dół nitki przymocowanej do dynamometru określaliśmy współczynnik tarcia – w momencie kiedy kula zaczynała się kręcić siłomierz pokazywał siłę co do wartości równą maksymalnej sile tarcia, z jaką deska działała na kulkę. Współczynniki tarcia między kulkami zmierzone zostały w podobny sposób – deska była zastępowana po prostu przez usztywnioną kulkę. Otrzymane wyniki wraz z błędami pokazuje tabela:

			
	Kulka 1	Kulka 2	Kulka 3
Współczynnik tarcia między kulką a rynną	$1,22 \pm 0,18$	$0,86 \pm 0,12$	$0,51 \pm 0,09$
	Kulki 1 & 2	Kulki 2 & 3	Kulki 1&3
Współczynnik tarcia między kulkami	$2,30 \pm 0,19$	$0,60 \pm 0,10$	$0,90 \pm 0,12$

3.2 Porównanie przewidywań teoretycznych z wynikami eksperymentu. Sprawdziliśmy nasz model dla 3 różnych układów kulek w dwóch rynnach o kątach rozwarcia wynoszących odpowiednio $2\beta = 90^\circ$ i $2\beta = 150^\circ$.



Warunki 1) – 5) pozwoliły nam przewidzieć w każdym przypadku czy i - jeśli tak - to w jakich granicach dany układ będzie stabilny. Należy zaznaczyć, że za każdym razem kulka o mniejszym promieniu była umieszczana niżej. Wydaje się że z naszego układu nierówności nie wynika bezpośrednio to, że niższa kulka musi mieć mniejszy promień. Eksperymentując jednak z różnymi rodzajami kulek nigdy nie udało nam się uzyskać w takim przypadku sytuacji statycznej. Poniższa tabela pokazuje że nasze przewidywania teoretyczne pozostawały w dość dobrej zgodności z doświadczeniem.

Ustawienie	Kąt rozwarcia rynny $2\beta = 150^\circ$		Kąt rozwarcia rynny $2\beta = 90^\circ$	
	Eksperyment	Teoria	Eksperyment	Teoria
Kulki 1 & 2	$30^\circ \pm 1^\circ$	$32^\circ \pm 2^\circ$	$43^\circ \pm 1^\circ$	$42^\circ \pm 2^\circ$
Kulki 1 & 3	$29^\circ \pm 1^\circ$	$28^\circ \pm 2^\circ$	$38^\circ \pm 1^\circ$	$34^\circ \pm 2^\circ$
Kulki 2 & 3	układ niestabilny	układ niestabilny	$36^\circ \pm 1^\circ$	$33^\circ \pm 2^\circ$

Widać, że w większości przypadków kąt krytyczny jaki uzyskaliśmy w eksperymencie jest nieznacznie większy od wyliczonego z pomocą naszego modelu. Jest to prawdopodobnie związane z faktem, że w naszych rozważaniach pominęliśmy deformacje powierzchni stykających się ciał. W rzeczywistości odkształcenia powodują że kulki klinują się w rynnie przez co układ staje się bardziej stabilny. Uwzględnienie roli deformacji komplikowałoby jednak i tak już dość złożone równania. Poza tym pojawiłyby się istotne trudności natury eksperymentalnej. Należy podkreślić że wraz ze zmniejszaniem się kąta rozwarcia rynny kulki coraz łatwiej się w niej klinują i od pewnego momentu zaproponowany przez nas model zjawiska przestaje być w ogóle użyteczny. Okazuje się bowiem że nawet pojedyncza kulka może spoczywać w rynnie nawet dla bardzo dużych nachyleń.



4. Podsumowanie

W powyższym opracowaniu udało dowieść się nam, że dwie kule umieszczone obok siebie w pochylej rynnie V kształtnej mogą nie staczać się i pozostawać w równowadze. Dla każdych dwóch kul określić można krytyczny kąt nachylenia rynny powyżej którego zjawisko nie będzie zachodzić. Zależy on od mas i promieni użytych kulek, współczynnika tarcia między nimi, współczynników tarcia pomiędzy każdą z nich a powierzchnią rynny a także od kąta rozwarcia rynny. Z racji tego, że zaproponowany przez nas model nie uwzględnia wpływu deformacji kulek można posługiwać się nim jedynie w sytuacjach kiedy kąt rozwarcia rynny będzie dostatecznie duży.

5. Podziękowania

Należą się one przede wszystkim naszemu nauczycielowi fizyki i opiekunowi podczas prac nad turniejem Stanisławowi Lipińskiemu. Jego uwagi i sugestie były dla nas nieocenioną pomocą przy rozwiązywaniu tego problemu. Niezwykle użyteczny okazał się być również komputerowy model wykonany przez Tomasza Bobińskiego w programie *Maya*. Został on wykorzystany do graficznego zobrazowania położenia kulek w rynnie.

6. Wykorzystana literatura

- C. Kittel „*Mechanika*”, PWN, Warszawa
- W. Ungier, M Hamera „*Wybrane zadania z 43 olimpiad fizycznych*”, Wyd. Magippa,
- R. Resnick, D. Halliday „*Fizyka*”, PWN, Warszawa 2001.
- J. Leyko, „*Mechanika ogólna*”, PWN, Warszawa 1971

*Krzysztof Wójtowicz
Michał Oszmaniec*